Z2101 y Z2576 – 2do. recuperatorio 2do. parcial – 2024

E1) Calcular el área de la superficie de ecuación $z=\sqrt{8x^2+8y^2}$ con $x^2+y^2\le 4y$.

E2) Calcular la masa del cuerpo definido por $z \ge x^2+4y^2$, $z \le 16-3x^2$, con densidad puntual proporcional a la distancia de cada punto al eje z.

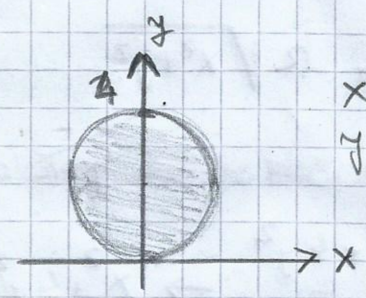
E3) Sea D la región plana limitada por las curvas de ecuación $y=x$, $y=x^3$. Calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la frontera de D, sabiendo que $D\bar{f}\,(x,y)=\begin{pmatrix}2xy & x^2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

E4) Sea la curva $C=C_1 \cup C_2$ donde C_1: $\bar{h}(t)=(t^2,t)$ con $0\le t\le 1$, C_2: $y=1$ con $0\le x\le 1$. Calcular la circulación de $\bar{f}\,(x,y)=(y^2+1\,,\,2xy)$ a lo largo de C desde (0,0) hasta (0,1) utilizando la definición de integral de línea. Si es posible, verificar el resultado obtenido utilizando función potencial.

AM 2	2° parcial 2° rec. Prof. Campillo	HOJA N° 1/2 FECHA 2024

(E1) Calcular el área de la sup. de ecuación $z = \sqrt{8x^2+8y^2}$ con $x^2+y^2 \leq 4y$

$$x^2+y^2 \leq 4y$$
$$x^2+y^2-4y+2^2-2^2 \leq 0$$
$$x^2+(y-2)^2 \leq 4$$



$x = r\cos(t)$
$y = r\,\mathrm{sen}(t)+2$

$0 \leq t \leq 2\pi$
$0 \leq r \leq 2$

$S: z = \sqrt{8x^2+8y^2}$ $\quad z \geq 0$

$z^2 = 8x^2+8y^2 \longrightarrow 8x^2+8y^2-z^2=0$

$G_{(x,y,z)} = 8x^2+8y^2-z^2 \longrightarrow N_S = \dfrac{\nabla G(x,y,z)}{|G'z|}$

$z = \sqrt{8(x^2+y^2)}$

$$N_S = \left(\frac{\cancel{16}^{8}x}{\cancel{2}z}, \frac{\cancel{16}^{8}y}{\cancel{2}z}, \frac{-\cancel{2z}}{\cancel{2z}}\right)$$

$$N_S = \left(\frac{8x}{\sqrt{8(x^2+y^2)}}, \frac{8y}{\sqrt{8(x^2+y^2)}}, -1\right)$$

$$\|N_S\| = \sqrt{\left(\frac{8x}{\sqrt{8(x^2+y^2)}}\right)^2+\left(\frac{8y}{\sqrt{8(x^2+y^2)}}\right)^2+(-1)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{\cancel{64}^{8}x^2}{\cancel{8}(x^2+y^2)}+\frac{\cancel{64}^{8}y^2}{\cancel{8}(x^2+y^2)}+1} = \sqrt{8\frac{\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}}+1} = \sqrt{9}$$

$$\boxed{\|N_S\| = 3}$$

$$A_S = \iint_S dS = \iint_D \|N_S\|\,dx\,dy = \iint_D 3\,dx\,dy = 3\underbrace{\iint_D dx\,dy}_{\text{Área de D}} = 3\cdot\pi\cdot 2^2 = 12\pi$$

$$\boxed{A_S = 12\pi}$$

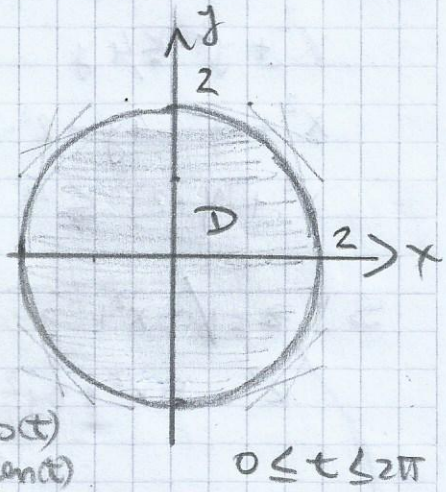
NOTA

E2) Calcular la masa del cuerpo definido por $\left.\begin{array}{l} z \geq x^2+4y^2, \\ z \leq 16-3x^2 \end{array}\right\} W$

con densidad puntual proporcional a la distancia de cada punto al eje z

$$\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}$$

Hallo la intersección para analizar la proy:



$$\begin{cases} z = x^2+4y^2 \\ z = 16-3x^2 \end{cases} \rightarrow x^2+4y^2 = 16-3x^2$$

$$4x^2+4y^2 = 16$$

$$\boxed{x^2+y^2=4}$$

$$\begin{cases} x = r\cos(t) \\ y = r\,\mathrm{sen}(t) \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq t \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \end{array}$$

$$x^2+4y^2 \leq z \leq 16-3x^2$$

$$\text{Masa} = \iiint_W \delta(x\,y\,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_D \int_{x^2+4y^2}^{16-3x^2} k\sqrt{x^2+y^2}\;dz\,dx\,dy$$

$$= k\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,\underbrace{(16-3x^2-x^2-4y^2)}_{16-4(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

C.V.

$$= k\int_0^{2\pi}\int_0^2 \underbrace{r\,r\,(16-4r^2)}_{16r^2-4r^4}\,dr\,dt = 4k\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r^2-r^4\,dr\,dt$$

Jac.

$$= 4k \cdot 2\pi \cdot \frac{4r^3}{3} - \frac{r^5}{5}\Big|_0^2 = 8k\pi\left(\frac{32}{3}-\frac{32}{5}\right) = 8k\pi\frac{64}{15}$$

$$\boxed{\text{Masa} = \frac{512}{15}\pi k}$$

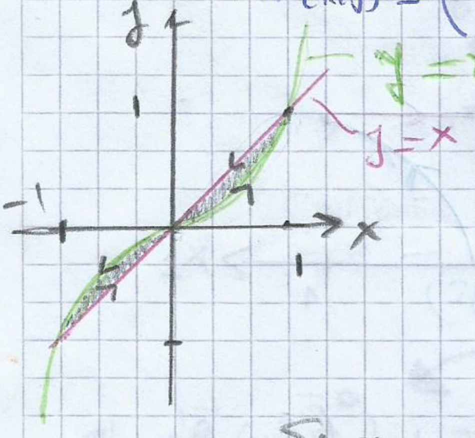
NOTA

(E3) Sea D la región plana limitada por las curvas de ec. $y = x$, $y = x^3$
Calcular la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la frontera de D, sabiendo que

$$D\bar{f}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2xy & x^2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\bar{f} = (P, Q)$

$$D\bar{f}_{(x,y)} = \begin{pmatrix} P'_x & P'_y \\ Q'_x & Q'_y \end{pmatrix}$$



- C: curva suave a trozos
- $\bar{f} \in C'$
- D es una región compacta $\therefore C = \partial D$

Se cumplen las hip. T Green $\Rightarrow \oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{e} = \iint_D Q'_x - P'_y \, dx\, dy$

$$\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{e} = \iint_D (-1 - x^2)\, dx\, dy = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} -1 - x^2 \, dy\, dx + \int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x} -1 - x^2 \, dy\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-1 - x^2)(x^3 - x)\, dx + \int_{0}^{1} (-1 - x^2)(x - x^3)\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \cancel{-x^3} + x - x^5 + \cancel{x^3}\, dx + \int_{0}^{1} -x + \cancel{x^3} - \cancel{x^3} + x^5 \, dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6}\Big|_{-1}^{0} + -\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6}\Big|_{0}^{1} = -\frac{1}{3} + -\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$$

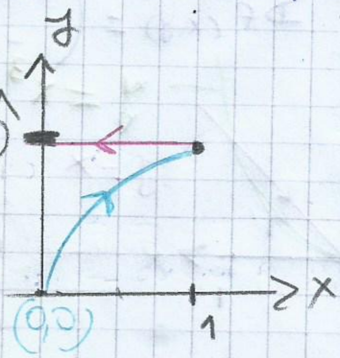
$$\boxed{\oint_{C^+} \bar{f}\, d\bar{e} = -\frac{2}{3}}$$

NOTA

(E4) Sea la curva $C = C_1 \cup C_2$ donde $C_1 : \bar{h}(t) = (t^2, t)$ $0 \le t \le 1$
$C_2 : y = 1$ con $0 \le x \le 1$

Calcular la circulación de $\bar{f}(x,y) = (y^2+1, 2xy)$ a lo largo de C desde $(0,0)$ hasta $(0,1)$ utilizando la definición de integral de línea.
Si es posible, verificar el resultado obtenido utilizando función potencial

C_1: $x = t^2 = y^2$, $y = t$; $h'(t) = (2t, 1)$



C_2: $y = 1 \rightarrow \bar{\beta}(t) = (t, 1) \rightarrow \bar{\beta}'(t) = (1,0)$
$0 \le x \le 1$

con t de 0 a 1 la curva se recorre al revés ⊛

$C = C_1 \cup C_2$

$$\int_C \bar{f}\, d\bar{\ell} = \int_{C_1} \bar{f}\, d\bar{\ell} + \int_{C_2} \bar{f}\, d\bar{\ell} = \int_0^1 \bar{f}(h(t))\, h'(t)\, dt + \int_1^0 \bar{f}(\beta(t))\, \bar{\beta}'(t)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{t^2+1}_{y^2+1}, \underbrace{2t^2 t}_{2xy})(2t,1)\, dt + \int_1^0 (\underbrace{1^2+1}_{y^2+1}, \underbrace{2t \cdot 1}_{2xy})(1,0)\, dt =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 2t^3 + 2t + 2t^3\, dt}_{2} + \underbrace{\int_1^0 2\, dt}_{-2} = \boxed{0 = \int_C \bar{f}\, d\bar{\ell}}$$

- $\bar{f}(x,y) = (\underbrace{y^2+1}_{P}, \underbrace{2xy}_{Q})$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{dom}(\bar{f}) = \mathbb{R}^2 \checkmark \\ \text{Matriz Jac.}: \quad \left. \begin{array}{l} P'_y = 2y \\ Q'_x = 2y \end{array} \right\} = \checkmark \end{array} \right.$

$\bar{f}$ es campo conservativo $\Rightarrow \exists \varphi / \bar{f} = \nabla \varphi$

$(\varphi'_x, \varphi'_y) = (y^2+1, 2xy)$

$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'_x = y^2+1 \\ \varphi'_y = 2xy \quad (\text{I}) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{integro en } X} \varphi(x,y) = y^2 x + x + \alpha(y)$

$\varphi'_y = 2yx + \alpha'(y) \overset{(\text{I})}{=} 2xy \rightarrow \alpha'(y) = 0$

$\alpha(y) = C$

$$\boxed{\varphi(x,y) = 2xy + x + C}$$

$$\int_C \bar{f}\, d\bar{\ell} = \int_A^B \nabla \varphi = \varphi(B) - \varphi(A) = 0 + 0 + C - 0 - 0 - C = \boxed{0 = \int_C \bar{f}\, d\bar{\ell}}$$

NOTA